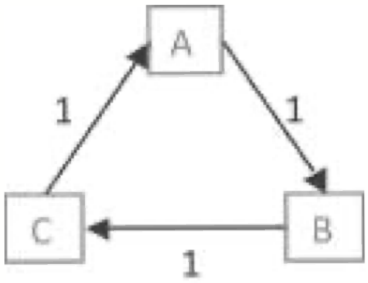
Existence d'une unique distribution invariante qui n'entraîne pas nécessairement la convergence des distributions.

Soit le graphe suivant :



Il n'y a convergence que si l'état initial est $\pi_0 = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$

Démonstration :

La matrice de transition du graphe probabiliste ci-dessus est : $T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

- Montrons qu'il existe une unique distribution invariante :

  Ceci revient à déterminer la matrice ligne $\pi = \begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix}$ telle que $\pi T = \pi$

$$\pi T = \pi \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} c & a & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b & c \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} c = a \\ a = b \\ b = c \end{cases} \Leftrightarrow a = b = c$$

  De plus, $a + b + c = 1$ donc $\begin{cases} \pi T = \pi \\ a + b + c = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \pi = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$

  Ce graphe probabiliste donne une unique distribution invariante : $\pi = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$

- Déterminons π_n, suivant les valeurs de $n \in \mathbb{N}$, avec π_0 la distribution initiale.

  On remarque que $T^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $T^3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}^3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I$

  (ce qui ce conçoit vu le graphe...)

  Une récurrence immédiate permet d'en déduire que :

$$\forall k \in \mathbb{N},\ T^{3k} = I,\ \ T^{3k+1} = T \ \text{ et } \ T^{3k+2} = T^2$$

Et donc : $\forall k \in \mathbb{N}$,

$$\begin{cases} \pi_{3k} = \pi_0 T^{3k} = \pi_0 I = \pi_0 \\ \pi_{3k+1} = \pi_0 T^{3k+1} = \pi_0 T \\ \pi_{3k+2} = \pi_0 T^{3k+2} = \pi_0 T^2 \end{cases}$$

- Conclusion :

  d'après les deux points précédents : $\forall k \in \mathbb{N},\ \pi_{3k} = \pi_{3k+1} \Leftrightarrow \pi_0 = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$

  Et dans le cas où $\pi_0 = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$, $T^{3k+2} = \pi_0 T^2 = \pi_0 T \times T = \pi_0 T = \pi_0$, ce qui donne une suite constante, donc convergente.

  Dans les autres cas, la suite est cyclique. Elle ne converge pas (elle oscille entre les valeurs π_0, et ^{2}).

  Donc $\boxed{\text{la suite } (\pi_n) \text{ converge si et seulement si } \pi_0 = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}}$

  Remarque : si la suite est convergente, elle converge vers $\begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$